# 多様体上の量子力学の局所的性質と大局的構造 : スピン接続と非同値量子化(マニフォールド上での量子化および量子論)



尾高, 一彦

# 多様体上の量子力学の局所的性質と大局的構造

## ー　スピン接続と非同値量子化　ー

防衛大学校数学物理学科　　尾高 一彦

## 1．序論

複雑な配位空間を持つ場でも、$R^3$空間上の量子力学の類推によって、量子化されている[1)]。現実に実験のできる質点の配位空間は紛れもなく$R^3$であり、その量子力学にはなんの問題もない。しかし、場の配位空間は必ずしもtopologicalに自明な空間とは限らない。非線形$\sigma$模型 等がその例である。そこで「複雑な配位空間を持つ場を、$R^3$上の量子力学の類推によって、量子化してよいのか？」という疑問が生ずる。実際この疑問と関連していると思われる困難（ゲージアノーマリ）が場の量子論には存在する[2)]。

そこで、「複雑な配位空間を持つ場をいかに量子化するべきなのか」を考察するための準備として、出来るだけ大きな枠組み（弱い制限）から多様体上の量子力学を見直そう。特に、（１）古典力学や$R^3$上の量子力学にない状況として、多様体（一般的配位空間）上の量子力学には、波動関数の非局所的な境界値条件の問題がある．この問題が量子化の方法にどのような影響を与えるか？（２）演算子の代数的性質と作用される波動関数の性質とは連動している．古典論的論理で決める代数と、純量子論的なものである波動関数とは矛盾しないのか？といった点に留意し、配位空間の大域的構造の量子論への影響を調べよう。講演は次の順序で行った。

目次：１．序論　２．量子論の構成（局所的性質とスピン）　３．大域的構造とスピン接続（ゲージ構造）　４．$S^d$上の量子力学と接続の任意性　５．誘導表現（$S^d \simeq SO(d+1)/SO(d)$）６．一般化の可能性と今後の課題

## 2．量子論の構成（局所的性質とスピン）

まず最初に、多様体上の量子力学を議論する上での前提を明確にしておく。最初に定義するものは、下記の性質を持つ配位空間$(Q)$上の波動関数である。そして、その波動関数の時間発展や他の諸性質を議論するのが量子力学である。我々は古典的対応の基に構成する代数を先に考えない。波動関数を$\psi(q)(Q \ni q)$とし、$\rho(q) \equiv \psi(q)^\dagger * \psi(q)$という量を導入する。$\dagger$や$*$の定義は後ほど議論するとして、まず$\rho(q)$を位置$q$での粒子の相対的存在確率すなわち確率密度と解釈する。そのためには$\rho(q)$は実数でなおかつ$0 \leq \rho(q) < \infty$でなくてはならない。これだけの条件か

らでは幾つかの可能性が残るが、以後の議論では、$\psi(q)$ をC$^n$値関数とする。よって、$\dagger$は複素共役で、$*$は内積を表す。

次に波動関数の時間（t）発展を考える。確率密度の時間変化は、連続の方程式を満たさねばならない。多様体が局所的にユークリット空間であることを考慮すれば、連続の方程式は

$$\frac{d}{dt}\rho(qt) \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta^a}J^a(qt) \tag{1}$$

と書ける。ただし、$\theta^a$は局所的直交座標であり、$J^a(qt)$ はカレント（確率解釈から要求される新たな物理量）である。$J^a(q,t)$ の形を決めるに当たり、$\psi(qt)$ の時間発展に関し一階の微分方程式を仮定する。この仮定は波動関数の確率解釈に帰される。

$$\frac{d}{dt}\psi(qt) \;=\; \hat{H}(q)\psi(qt) \tag{2a}$$

$$\frac{d}{dt}\psi(qt)^\dagger \;=\; -\psi(qt)^\dagger\hat{H}(q)^\dagger \tag{2b}$$

$\hat{H}$は一応ハミルトニアンと呼ぶが、特に観測量としてのエネルギーとの関係はここでは議論しない。また、重ね合わせの原理より、$\psi(qt)$ の線形性は仮定する。（1）、（2）及び$\rho(qt)$ の定義が両立するように、$J^a(qt)$ 及び$\hat{H}(q)$ の形を決める。これらの形は、

$$\hat{H}(q) \;=\; i\frac{\partial}{\partial\theta^a}C(q)\frac{\partial}{\partial\theta^a} \;+\; V(q) \tag{3}$$

$$J^a(qt) \;=\; C(q)[\frac{\partial}{\partial\theta^a}\psi(qt)^\dagger * \psi(qt) \;-\; \psi(qt)^\dagger * \frac{\partial}{\partial\theta^a}\psi(q)] \tag{4}$$

と決まる。ただし $C(q)$, $V(q)$ は決定出来ない実関数である。$V(q)$ はポテンシャルの項であり、また $C(q)$ は「演算子の順序付け問題」と深く関係したものであるが、今回はこの問題には触れず、以後定数（＝1）とする。ここでは局所的直交座標を使ったが、Hodge 積を使えば一般座標でも同様の議論はできる。また他の可能性としてディラック方程式型もあるが、基本的な議論は変わらない。

内積*を

$$\rho(qt) \equiv \psi(qt)^{\mu\dagger} G_{\mu\nu}(q) \psi^{\nu}(qt) \tag{5}$$

と記す。$\rho(qt)$ は確率密度であるから、$G_{\mu\nu}(q)$ は計量的性質を持たねばならない。そこで波動関数の性質は Riemann 幾何学を摸して議論することができ、その対応関係は次のようなものである。

$$\vec{e}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E}_\mu(q),\ \ \vec{E}^\dagger_\mu(q) \tag{6a}$$

$$\vec{V} \ = \ V^\mu \vec{e}_\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(qt) \ = \ \vec{E}_\mu(q)\psi^\mu(qt) \tag{6b}$$

$$(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = g_{\mu\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad (\vec{E}^\dagger_\mu, \vec{E}_\nu) = G_{\mu\nu}(q) \tag{6c}$$

$$(\vec{V}, \vec{U}) = V^\mu U^\nu g_{\mu\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad (\psi^\dagger, \psi) = \psi^{\dagger\mu}\psi^\nu G_{\mu\nu} \tag{6d}$$

ところで座標系の設定は人為的なものでしかないので、物理量（$\rho$, $J_a d\theta^a$）は座標系の選択によるべきではない。しかし直接の観測量でない波動関数はそのかぎりではない。そこで波動関数の性質を調べるには、座標系 ($\vec{e}_\mu$) の選択と $\vec{E}_\mu(q)$(あるいは$\psi^\mu(qt)$) との関係を見る必要がある。

多様体は局所的にユークリット空間であるから局所的には直交座標 ($\vec{e}_\mu \ \rightarrow \ \vec{e}_a$, $g_{\mu\nu} \ \rightarrow \ \delta_{ab}$) を取ることができる。ここで我々は次の仮定を置く。

「局所的直交座標系での、波動関数に関する計量$G_{\mu\nu}$は$\delta_{ab}$である」

さて各点での直交座標系の設定には任意性があるが、各座標系の間は回転により関係づけられる。

$$\vec{e}'^{a} \ = \ v^a_b \vec{e}^{b} \qquad v^a_b \ \in \ SO(d)$$

この回転に対し物理量$\rho(qt)$ は不変でなければならない。そこで、波動関数は回転群のユニタリー表現の基底（スピン: n次元表現）である必要があり、スピンという概念が導入される。

## 3．大域的構造とスピン接続（ゲージ構造）

一方、カレントやハミルトニアンの定義には微分演算が含まれている。そのため配位空間上の異なった点の間の比較が必要になる。通常、直交座標系に関してはアフィン接続を定義し、接続係数を導入する。

$$\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b(q) \;=\; \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c(q) \tag{7}$$

近接点の局所的直交座標系はこの接続係数を用い、

$$\vec{e}_b(q+d\theta^a\vec{e}_a) \;=\; \vec{e}_b(q)+d\theta^a\Gamma^c_{ab}\vec{e}_c(q) \;=\; (\delta_{bc}+d\theta^a\Gamma^c_{ab})\vec{e}_c(q) \tag{8}$$

と与えられる。$(\delta_{bc}+d\theta^a\Gamma^c_{ab})$ は回転（SO(d)）の無限小変換であり、接続係数は$\Gamma^c_{ab}=-\Gamma^b_{ac}$を満たす。

近接点の$\vec{E}_\mu$に関しては、先の仮定より、

$$\vec{E}_\mu(q+d\theta^a\vec{e}_a) \;=\; V^\nu_\mu\vec{E}_\nu(q) \tag{9}$$

となる。ここでの$V^\nu_\mu$はSO(d) の無限小変換 $(\delta_{bc}+d\theta^a\Gamma^c_{ab})$ のユニタリー表現行列である。そこで接続（スピン接続）は

$$\tilde{\nabla}_{\vec{e}_a}\vec{E}_\mu \;=\; Tr[\Gamma^c_{ab}(t^\alpha)^b_c]T^{\alpha\nu}_\mu\vec{E}_\nu \tag{10}$$

$$t^\alpha:\ SO(d)\text{群の}Lie\text{演算子の}Ajoint\text{表現行列}$$

$$T^\alpha:\ SO(d)\text{群の}Lie\text{演算子の n 次元表現行列}$$

と与えることができ、一次形式

$$d\theta^a A^\alpha_a \;\equiv\; d\theta^a Tr[\Gamma^c_{ab}(t^\alpha)^b_c] \;\equiv\; A^\alpha \tag{11}$$

を導入すると、直交座標系の変更 $(\vec{e}'^a=v^a_b\vec{e}^b)$ に対し、この一次形式は

$$A^\alpha t^\alpha \;\Longrightarrow\; -\,v^\dagger dv+v^\dagger A^\alpha t^\alpha v \tag{12a}$$

$$A^\alpha T^\alpha \;\Longrightarrow\; -\,V^\dagger dV+V^\dagger A^\alpha T^\alpha V \tag{12b}$$

と変換する。ただし $V$は $v$のユニタリー表現行列である。この一次形式を用いれば局所的直交座標

系の変換に対し不変なカレント（物理量）は、

$$d\theta^a J_a \;=\; -\psi^{\dagger\mu}[\delta_{\mu\nu}d - A^\alpha T^\alpha_{\mu\nu}]\psi^\nu + C.C. \tag{13}$$

と書ける。

波動関数に関する時間発展等の物理的性質を調べるためには、接続係数の形が必要である。この形を決めるという問題は、上で示したように、多様体の各点の接平面上に局所的直交座標系を無矛盾に（連続かつ一意的に）定義するという、純粋に多様体の性質の問題に帰着できる。しかし、回転群の表現に関し、局所的にユニタリー同値な表現はいくらでも存在する。これらの表現が大域的にもユニタリー同値であれば、物理的に全く差がでない。そのため、これらの中から適当な表現を一つ選べばよい。大域的なユニタリー同値性とは、波動関数の境界値条件も同じことである。

多様体の各点の接平面上に局所的直交座標系を連続かつ一意的に定義するという問題を考えよう。まず多様体をいくつかのチャートに分け、各チャートで接ベクトル（$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$）を作る。それに適当な GL 変換を行い局所的直交座標系を構成する。2個以上チャートがある場合、2個のチャートの共通部分の同じ点上では、それぞれのチャートに属する2個の局所的直交座標系ある。それらは回転群によって関係付けられる。この回転群の要素は、共通部分で連続かつ一意的（一点に対し一個の回転群の要素）に定義されている必要がある。この共通領域がもし $\mathrm{S}^d$ と同相であれば、ホモトピークラスの議論による制限がこの回転群の要素につく。

例えば、境界領域が $\mathrm{S}^3$ の時、$\Pi_3(SO(d)) = Z$ より、巻き数 N（整数）が

$$N = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3} Tr[(v^\dagger dv)\wedge(v^\dagger dv)\wedge(v^\dagger dv)] \tag{14a}$$

と定義され、2個の座標系をつなぐ回転群の要素 $v$ は (14a) を満たすものでなくてはならない。さらに配位空間が $\mathrm{S}^4$ と同相なら (14a) は

$$= -\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4} Tr[R\wedge R] \tag{14b}$$

と書ける。ただし、$R$ は上で導入した接続係数における曲率である。

境界領域が$\mathrm{S}^1$と同相の場合は、$\Pi_1(SO(2)) = Z$より、巻き数$N$(整数) は、

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} Tr[(v^\dagger dv)] \left(= -\frac{1}{\pi}\int_{S^2} R\right) \tag{15a}$$

である。

4．$\mathrm{S}^d$上の量子力学と接続の任意性

配位空間として、$\mathrm{S}^d$を取り、具体的に接続係数を構成してみよう。d+1 次元ユークリッド空間に$\mathrm{S}^d$を埋め込んだ場合の球面上の点を

$$\vec{e}_{d+1} = (y_1, \cdots, y_{d+1}) \qquad \sum_{i=1}^{i=d+1} y_i^2 = 1 \tag{16}$$

と表し、各点の接平面上の直交系の単位ベクトルを$\vec{e}_a(a = 1, \cdots, d)$ とする。チャートは南半球（S）と北半球（N）の２個導入し、各々に関し次のようなStereographic projection を採用する。

$$(S) \qquad (y_i, y_{d+1}) = \frac{1}{1+\vec{x}^2}(2x_i, \vec{x}^2 - 1), \quad x_i = \frac{1}{1-y_{d+1}} y_i \tag{17a}$$

$$(N) \qquad (y_i, y_{d+1}) = \frac{1}{1+\vec{z}^2}(2z_i, 1 - \vec{z}^2), \quad z_i = \frac{1}{1+y_{d+1}} y_i \tag{17b}$$

共通領域での変数変換は$\vec{x} = \frac{\vec{z}}{\vec{z}^2}$である。

各チャートでの局所的直交座標系の基底ベクトルは

$$(S) \quad \vec{e}_a = \frac{1+\vec{x}^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_a}\vec{e}_{d+1} = \frac{1}{1+\vec{x}^2}\left(\delta_{ai}(1+\vec{x}^2) - 2x_a x_i,\ 2x_a\right), \quad (i = 1, \cdots, d) \tag{18a}$$

$$(N) \quad \vec{e}_a = \frac{1+\vec{z}^2}{2}\frac{\partial}{\partial z_a}\vec{e}_{d+1} = \frac{1}{1+\vec{z}^2}\left(\delta_{ai}(1+\vec{z}^2) - 2z_a z_i,\ -2z_a\right) \tag{18b}$$

となる。(18) よりわかるように、対極点 ($\vec{z}^2 \to \infty$ (南極) , $\vec{x}^2 \to \infty$ (北極) ) においては$\vec{e}_a$は不定である。よってこの場合チャートは２個必要である。

共通部分の変換 ($\vec{e}^N_a = \sum_b v^b_a \ \vec{e}^S_b$) は

$$v^a_b = \vec{e}^S_a \cdot \vec{e}^N_b = \left(\delta_{ab} - 2\frac{z_a z_b}{\vec{z}^2}\right) \in O(d) \tag{19}$$

となる。ただし、上記の座標系の取り方では、各チャートで右手系と左手系が逆になり、$det(v) = -1$ となる。そこでどちらか一方のチャートで$-\vec{e}_d$と定義しなおす必要がある。

各チャートでの接続係数及び曲率は

$$(S) \qquad \frac{1+\vec{x}^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c, \quad \Gamma^c_{ab} = (\delta_{ab}x_c - \delta_{ac}x_b) \tag{20a}$$

$$R^c_{(ab)d} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc} \tag{20b}$$

$$(N) \qquad \frac{1+\vec{z}^2}{2}\frac{\partial}{\partial z_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c, \quad \Gamma^c_{ab} = (\delta_{ab}z_c - \delta_{ac}z_b) \tag{20c}$$

$$R^c_{(ab)d} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc} \tag{20d}$$

と求まる。

また波動関数に関する微分演算は

$$(S) \qquad (\frac{1+\vec{x}^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_a} - Tr[\Gamma^c_{ab}(t^\alpha)^b_c]T^\alpha)\psi \tag{21a}$$

$$(N) \qquad (\frac{1+\vec{z}^2}{2}\frac{\partial}{\partial z_a} - Tr[\Gamma^c_{ab}(t^\alpha)^b_c]T^\alpha)\psi \tag{21b}$$

となる。

具体的に d=2 の場合を見てみよう。

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22a}$$

$$\frac{1}{2}Tr(\Gamma_1 t) = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \frac{1}{2}Tr(\Gamma_2 t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad R_{(12)} = 1 \tag{22b}$$

2つのチャート間を繋ぐ行列は

$$v_a^b = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \quad cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{\vec{x}^2}}, \quad sin\theta = \frac{x_2}{\sqrt{\vec{x}^2}} \tag{22c}$$

となり、巻き数 $N$ は1で、ホモトピークラスの条件 (15a) を満たす。

d=3 の場合は、上記 (18)(20) の他に次の様な接続係数を作ることができる。各点での局所的直交座標系の単位ベクトルは

$$\vec{f_1} = \frac{2}{1+\vec{x}^2}(-x_2, x_1, -\frac{1}{2}(\vec{x}^2 - 1), x_3), \quad \vec{f_2} = \frac{2}{1+\vec{x}^2}(-x_3, \frac{1}{2}(\vec{x}^2 - 1), x_1, -x_2),$$

$$\vec{f_3} = \frac{2}{1+\vec{x}^2}(-\frac{1}{2}(\vec{x}^2 - 1), -x_3, x_2, x_1) \tag{23a}$$

であり、$\vec{x}^2 \to \infty$ においても well-defined である。そのためチャートは一つですむ。接続係数及び曲率は

$$-\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 1, \quad \Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{31}^2 = 1, \quad \Gamma_{32}^1 = -\Gamma_{23}^1 = 1, \quad R = 0 \tag{23b}$$

となる。(23) と (18)(20) とでは局所的直交座標系の構造はかなり違う。これらが波動関数のレベルでユニタリー同値であるかどうかは調べねばならない。

上記のいずれの場合も等質性を満たしている。ここでの等質性とは、多様体上のいかなる点も同等であるから「局所的直交座標系でみる限り、あらゆる点で物理は同じである（物理的に意味のある演算子の満たす代数は多様体上のすべての点で同じ）」例えば、S $^d$での速度演算子を共変微分に対応させるなら、交換関係の右辺は $R^c_{(ab)d} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}$ であり位置によっていない。もちろんこれを破る相互作用を入れることは可能である。

## 5．誘導表現

Poincaré 群の表現を構成するにあたり Wigner によって開発され、Mackey によって等質空間上の量子力学に適用された誘導表現[3]との対応を示しておこう。よく使われる Dirac の表記 $|\Psi t>$(physical state) と我々の使った表記との対応は、

$$|\vec{r}\xi>:\vec{r}\text{(等質空間上の位置ベクトル)の対角化状態} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E}_\xi(\vec{r}) \qquad (24a)$$

$$<\vec{r}\xi\,|\,\Psi t> \equiv \Psi^\xi(\vec{r}t), \quad |\vec{r}\xi><\vec{r}\xi\,|\,\Psi t> \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E}_\xi(\vec{r})\Psi^\xi(\vec{r}t) \qquad (24b)$$

である。配位空間を S$^d$ ($\simeq\ SO(d+1)/SO(d)$) とすると、球面上の微分は、

$$\sum_b \frac{r_b}{r^2}G_{ba} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+\vec{x}^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_a} - Tr[\Gamma^c_{ab}(t^\alpha)^b_c]T^\alpha \qquad (25)$$

と対応させられる。ただし $G_{ba}$は SO(d+1) の Lie 演算子であり、$\vec{r}$は $d+1$ 次元空間に原点が一致するように S$^d$を埋めた時の球上の位置ベクトルである。

上記のように、等質空間上の量子力学との対応をみ、それらの接続係数の一致を確認することは容易であるが、その同等性が明確になったとはまだ言いがたい。誘導表現の topological な性質[4]を含め、我々のアプローチと誘導表現のアプローチとの関係を今少し調べる必要がある。

## 6．一般化の可能性と今後の課題

上に示した多様体上の量子力学のアプローチは、かなり一般的仮定から出発した。配位空間が S$^d$の時、具体的に構成したが、これがユニークであるかどうかはまだ完全に議論しきていない。特

に、波動関数の境界値の問題については議論をしていない。また誘導表現を基にした等質空間上の量子力学との同等性も完全ではない。しかし誘導表現を基礎にするよりは我々のアプローチの方が枠組みは広いことはたしかであり、等質空間以外の topological に自明でない空間にも適応可能である。また種々の観測量を導入し、より確かな量子力学の枠を構成する必要がある。

参考文献


1) P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics(Yeshiva,New York, 1964)

2) T. Itoh and K. Odaka, Fortschr. Phys. 39(1991)557.

3) C.J. Isham, in Relativity, Group and Topology II (ed. B.S. de Witt and R. Stora, North-Holland, Amsterdam 1984),
G.W. Mackey, Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics (Benjamin, New York 1969),
N.P. Landsman and N. Linden, Nucl. Phys. B365(1991)121,
Y. Ohnuki and S. Kitakado, J. Math. Phys. 34(1993)2827.

4) K. Odaka, to appear in Procceding of Symmetries in Science VIII (Bregenz,1994)